

No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse suivante : <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

**Matemáticas**  
**Nivel Superior**  
**Prueba 3 – estadística y probabilidad**

Martes 10 de noviembre de 2020 (tarde)

1 hora

---

**Instrucciones para los alumnos**

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 8]

Peter, Dan y Eva deciden observar el color de cada uno de los coches que van llegando a su colegio. Se supone que los colores de los coches son independientes unos de otros.

La probabilidad de que uno de los coches que llegan a su colegio sea rojo es  $\frac{1}{12}$ .

- (a) Peter observa 20 coches. Halle la probabilidad de que al menos tres de estos coches sean rojos. [2]
- (b) Dan observa coches hasta que llega uno rojo. Halle la probabilidad de que haya observado al menos seis coches. [2]
- (c) Eva observa coches hasta que han llegado tres rojos.
- (i) Halle la probabilidad de que Eva haya observado exactamente 20 coches.
- (ii) Halle el número esperado de coches que Eva habrá observado. [4]

2. [Puntuación máxima: 8]

La variable aleatoria discreta  $X$  tiene la siguiente función generatriz de probabilidad:

$$G_X(t) = \frac{2+t}{3}.$$

- (a) Escriba el valor de  $P(X=1)$ . [1]

La variable aleatoria discreta  $Y$  tiene la siguiente función generatriz de probabilidad:

$$G_Y(t) = \frac{kt+1}{k^2-t^2}, \text{ donde } k > 0.$$

- (b) Muestre que  $k=2$ . [3]
- (c) Sabiendo que  $X$  e  $Y$  son independientes, halle:
- (i)  $G_{X+Y}(t)$ , la función generatriz de probabilidad de  $X+Y$ ;
- (ii)  $E(X+Y)$ . [4]

## 3. [Puntuación máxima: 15]

Hay una tienda que vende zanahorias y brócoli. Los pesos de las zanahorias se pueden modelizar mediante una distribución normal de varianza 25 gramos<sup>2</sup> y los pesos del brócoli se pueden modelizar mediante una distribución normal de varianza 80 gramos<sup>2</sup>. El tendero afirma que el peso medio de las zanahorias es 130 gramos y que el peso medio del brócoli es 400 gramos.

- (a) Suponiendo que la afirmación del tendero sea correcta, halle la probabilidad de que seis zanahorias elegidas al azar pesen más del doble que un brócoli elegido al azar. [6]

Dong Wook decide investigar la afirmación del tendero de que el peso medio de las zanahorias es 130 gramos. Para hacerlo, piensa coger una muestra aleatoria de  $n$  zanahorias a fin de calcular un intervalo de confianza del 98% para el peso medio de la población.

- (b) Halle el mínimo valor de  $n$  que se necesita para garantizar que la amplitud del intervalo de confianza es menor que 2 gramos. [3]

Anjali cree que el peso medio del brócoli,  $\mu$  gramos, es inferior a 400 gramos. Por ello, decide realizar un contraste de hipótesis utilizando una muestra aleatoria de tamaño 8. Sus hipótesis son

$$H_0 : \mu = 400; H_1 : \mu < 400.$$

Decide que rechazará  $H_0$  si la media muestral es menor que 395 gramos.

- (c) Halle el nivel de significación de este contraste. [3]
- (d) Sabiendo que, en realidad, los pesos del brócoli siguen una distribución normal de media 392 gramos y varianza igual a 80 gramos<sup>2</sup>, halle la probabilidad de que Anjali cometa un error de tipo II. [3]

## 4. [Puntuación máxima: 19]

La variable aleatoria discreta  $X$  tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$x$	0	1	2
$P(X=x)$	$p$	$3p$	$1-4p$

donde  $0 < p < \frac{1}{4}$ .

(a) Halle una expresión para  $E(X)$ , en función de  $p$ . [2]

(b) Muestre que  $\text{Var}(X) = p(7 - 25p)$ . [3]

Christine y Sarah quieren estimar el valor de  $p$ . Para ello, toman una muestra aleatoria compuesta por  $n$  observaciones de  $X$ .

(c) Christine calcula la media muestral,  $\bar{X}$ , y propone  $C = \frac{2 - \bar{X}}{5}$  como estimador de  $p$ .

(i) Muestre que  $C$  es un estimador sin sesgo de  $p$ .

(ii) Halle  $\text{Var}(C)$ . [5]

(d) Sarah cuenta el número de ceros,  $Y$ , que hay en la muestra de tamaño  $n$ .

Propone  $S = \frac{Y}{n}$  como estimador de  $p$ .

(i) Escriba la distribución correspondiente a  $Y$ .

(ii) Muestre que  $S$  es un estimador sin sesgo de  $p$ .

(iii) Muestre que  $\text{Var}(S) = \frac{p(1-p)}{n}$ . [5]

(e) (i) Dibuje aproximadamente un gráfico de la razón  $\frac{\text{Var}(C)}{\text{Var}(S)}$  para  $0 < p < \frac{1}{4}$ , indicando claramente la escala en el eje  $y$ .

(ii) A partir de lo anterior, determine de manera razonada cuál de los dos estimadores,  $C$  o  $S$ , es el más eficiente. [4]